OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 15 februarie 2015

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a XI-a

1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det A = \det B = 1$. Demonstraţi că $Tr\left(A^{-1}B - AB^{-1}\right) = 0$.

Anca Andrei

Soluţie.

Din relaţia lui Cayley-Hamilton avem că $A^2 - (TrA)A + I_2 = O_2$ şi $B^2 - (TrB)B + I_2 = O_2$.

Înmulţind prima egalitate cu A^{-1} şi a doua cu B^{-1} se deduce că

$$A - (TrA)I_2 + A^{-1} = O_2 \quad \text{şi} \quad B - (TrB)I_2 + B^{-1} = O_2.$$

Prima relaţie se înmulţeşte la dreapta cu B iar a doua relaţie se înmulţeşte la stânga cu A şi obţinem

$$AB - (TrA)B + A^{-1}B = O_2 \text{ şi } AB - (TrB)A + AB^{-1} = O_2$$

Deducem că $AB = (TrA)B - A^{-1}B = (TrB)A - AB^{-1} \Rightarrow (TrA)B - (TrB)A = A^{-1}B - AB^{-1}$

Trecând la urme rezultă că $(TrA)(TrB) - (TrB)(TrA) = Tr\left(A^{-1}B - AB^{-1}\right) \Rightarrow Tr\left(A^{-1}B - AB^{-1}\right) = 0$.

Barem.

$A^2 - (TrA)A + I_2 = O_2$ şi $B^2 - (TrB)B + I_2 = O_2$	1 p
$A - (TrA)I_2 + A^{-1} = O_2$ şi $B - (TrB)I_2 + B^{-1} = O_2$	2 p
$AB - (TrA)B + A^{-1}B = O_2$ şi $AB - (TrB)A + AB^{-1} = O_2$	1 p
$(TrA)B - (TrB)A = A^{-1}B - AB^{-1}$	2 p
Finalizare	1 p

2. Fie A o matrice pătratică cu elemente întregi având determinantul egal cu 2. Să se demonstreze că cel puţin un complement algebric al matricei A este număr întreg impar.

Gazeta Matematică

Soluţie. Fie $A \in M_n(\mathbb{Z})$ cu $\det(A) = 2$ şi A^* adjuncta matricei A.

$$A \cdot A^* = (\det(A))I_n \Rightarrow A \cdot A^* = 2I_n \Rightarrow \det\left(A \cdot A^*\right) = \det(2I_n) \Rightarrow \det\left(A^*\right) = 2^{n-1} \qquad (1)$$

Dacă toţi complemenţii algebrici ai matricei A sunt numere întregi pare, atunci A^* are toate elementele numere întregi pare (elementele lui A^* sunt complemenţii algebrici ai elementelor lui A).
În $\det\left(A^*\right)$ putem "scoate în factor" pe 2 de pe fiecare linie şi obţinem $\det\left(A^*\right) = 2^n \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $1 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$ absurd!

Barem.

$A \cdot A^* = 2I_n$	1 p
$\det\left(A^*\right) = 2^{n-1}$	2 p
$\det\left(A^*\right) = 2^n \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$	3 p
Finalizare	1 p

3. Se consideră şirul de numere reale strict pozitive $(y_n)_{n\geq 1}$ aşa încât există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=\ell,\ \ell\in(0,\infty)$.

Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{\sqrt[n]{y_n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_1>0$ dat, să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\frac{1}{\ell}.$$

Anca Andrei

<u>Soluţie.</u> Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=\ell$, din criteriul Cauchy-D'Alambert rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n}=\ell$.

Deoarece $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{y_n}}>0$, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător .

Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ ar fi mărginit ar rezulta că există $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L\in\mathbb{R}$ şi trecând la limită relaţia de recurenţă obţinem că $L=L+\frac{1}{\ell}$, imposibil! Prin urmare şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit, deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

Pe de altă parte, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{(n+1)-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{y_n}}=\frac{1}{\ell}$ şi aplicând criteriul Cesaro-Stolz obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\frac{1}{\ell}$.

<u>Barem.</u>

Din criteriul Cauchy-D'Alambert rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n}=\ell$	1 p
Demonstrează că $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător	1 p
Justifică $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$	2 p
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{(n+1)-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{y_n}}=\frac{1}{\ell}$	2 p
Din criteriul Cesaro-Stolz obţine că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\frac{1}{\ell}$.	1 p

4. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$, astel încât $x_0=a>0$ şi $x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Să se studieze existenţa limitei şirului $(y^n x_n)_{n\geq 1}$, unde y este număr real fixat.
Este posibil ca limita șirului $(y^n x_n)_{n\geq 1}$ să fie 2015?

Dan Popescu

<u>Soluţie.</u>

Dacă $x_0=a=ctg\alpha$, $\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, atunci se deduce inductiv că $x_n=ctg\frac{\alpha}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Apoi $y^n x_n=\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}y^n=\dfrac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}\cdot\dfrac{(2y)^n}{\alpha}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$, $\forall n\geq 1$.

După ce se evaluează limitele standard, se deduce limita l a șirului $(y^n x_n)_{n\geq 1}$:

$$l=\begin{cases}0 & , \text{ dacă } y\in\left(\frac{-1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\\ \frac{1}{\operatorname{arcctg} a} & , \text{ dacă } y=\frac{1}{2}\\ \infty & , \text{ dacă } y\in\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)\end{cases}$$

Șirul $(y^n x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită pentru $y\leq -\frac{1}{2}$.

Da, se realizează limita l=2015 pentru $y=\frac{1}{2}$ și $a=\operatorname{ctg}\frac{1}{2015}$.

Barem.

$x_n = ctg\frac{\alpha}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$	2 p
$y^n x_n = \dfrac{\cos\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}} y^n = \dfrac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}} \cdot \dfrac{(2y)^n}{\alpha} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2^n}$	1 p
$l=\begin{cases}0 & , \text{ dacă } y\in\left(\frac{-1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\\ \frac{1}{\operatorname{arcctg} a} & , \text{ dacă } y=\frac{1}{2}\\ \infty & , \text{ dacă } y\in\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)\end{cases}$	2 p
Șirul $(y^n x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită pentru $y\leq -\frac{1}{2}$	1 p
l=2015 pentru $y=\frac{1}{2}$ și $a=\operatorname{ctg}\frac{1}{2015}$	1 p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.